Άσκηση
Έστω $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\liminf_{x \to +\infty} f(x)$ και $\limsup_{x \to +\infty} f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \leq \sin x \leq 1$. Επιπλέον, εάν $x_n = 2n\pi + \pi/2$ τότε $x_n \to +\infty$. Επίσης, $f(x_n) = \sin(2n\pi + \pi/2) = 1$

Άρα $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = 1$

Ακόμη, αν $y_n = 2n\pi - \pi/2$. Τότε $y_n \to +\infty$
Επίσης $f(y_n) = \sin(2n\pi - \pi/2) = -1$
Άρα $\underline{\lim} f(x) = \inf\{x \in \mathbb{R}^* \ \exists (x_n)$ τ.ω. $x_n \to +\infty$ και $f(x_n) \to x\}$
$= -1$

και αντίστοιχα $\overline{\lim} f(x) = \sup \Gamma_y = 1$

Άσκηση
Έστω $f(x) = \begin{cases} \sin 1/x, & x > 0 \\ 1 + \sin 1/x, & x < 0 \end{cases}$
Να βρείτε το $\underline{\lim}_{x \to 0} f(x)$ και $\overline{\lim}_{x \to 0} f(x)$.

Θεωρούμε μια ακολουθία $(y_n) \subseteq (0, +\infty)$ με $y_n \to 0$. Τότε οποιοδήποτε σημείο του $[-1, 1]$ είναι πιθανό σ.σ. (σημείο συσσώρευσης) για την $f(y_n)$.
Διότι, έστω $z \in [-1, 1]$, $\exists \theta \in [0, 2\pi]$ τ.ω. $\sin\theta = z$
(Αρκεί $\theta = \operatorname{Arcsin} z$), οπότε αν $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \theta}$ τότε $y_n \to 0$
και $f(y_n) = z$.
Όμοια, εάν $(y_n) \subseteq (-\infty, 0)$ και $y_n \to 0$, τότε οποιοδήποτε σημείο του $[0, 2]$ είναι πιθανό σημείο συσσώρευσης της $f(y_n)$. Συνεπώς, $\Gamma_y = [-1, 1] \cup [0, 2] = [-1, 2]$
Άρα,
$\underline{\lim} f(x) = -1 = \inf \Gamma_y$ και $\overline{\lim} f(x) = 2 = \sup \Gamma_y$

ΠΡΟΤΑΣΗ

"Έστω $f,g: A \to \mathbb{R}$ και έστω $y \in A$". Τότε ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες (με την προϋπόθεση ότι οι πράξεις είναι επιτρεπτές):

i) $\underline{\lim}_{x \to y} f(x) + \underline{\lim}_{x \to y} g(x) \leq \underline{\lim}_{x \to y} (f+g)(x)$

ii) $\overline{\lim}_{x \to y} (f(x) + g(x)) \leq \overline{\lim}_{x \to y} f(x) + \overline{\lim}_{x \to y} g(x)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

> #ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ
> Εάν (a_n) και (b_n) ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ τότε ισχύει
> $\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \leq \underline{\lim}\,(a_n + b_n)$

i) Έστω $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ και $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$.

Τότε $\underline{\lim}(a_n + b_n) = \sup_k \inf\{a_n + b_n, n \geq k\} \geq$

$\geq \inf\{a_n + b_n : n \geq k_0\} \geq \inf\{a_n : n \geq k_0\} + \inf\{b_n : n \geq k_0\}$ (*)

$\inf f \leq f,\ \inf g \leq g \Rightarrow \inf f + \inf g \leq f + g$

$\Rightarrow \inf f + \inf g \leq \inf(f+g)$

Επομένως, (*) $\overset{\boxed{k_0 \geq k_2}}{\underset{\boxed{k_0 \geq k_1}}{\geq}} \inf\{a_n : n \geq k_1\} + \inf\{b_n : n \geq k_2\}$ (*1)

Εάν $u_k := \inf\{a_n : n \geq k\}$, τότε η u_k είναι μια αύξουσα ακολουθία. (διότι όσο το k μεγαλώνει, το u_k αυξάνει) συνεπώς $\lim_k u_k = \sup u_k$.

Οπότε, από (*1) έχουμε ότι

$\underline{\lim}(a_n + b_n) \geq \inf\{a_n\ n \geq k_1\} + \inf\{b_n : n \geq k_2\}$ παίρνοντας τα $k_1, k_2 \to +\infty$ έχω $\underline{\lim}(a_n + b_n) \geq \sup_k\{a_n : n \geq k\} +$

$+ \sup_k\{b_n : n > k\} = \underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n$

Λόγω Προτασης σελ 21, $\exists (x_n) \subseteq A \setminus \{y\}$ με $x_n \to y$ και

$$\underline{\lim}(f(x_n)+g(x_n)) = \underline{\lim}_{x \to y}(f(x)+g(x))$$ Αλλά,

$$\underline{\lim}(f(x_n)+g(x_n)) \geq \underline{\lim} f(x_n) + \underline{\lim}\, g(x_n) \geq$$ διότι αν $\ell_1 = \underline{\lim} f(x)$ τότε $\ell_1 \in \Gamma_y$

$$\underline{\lim}_{x \to y} f(x) + \underline{\lim}_{x \to y} g(x)$$

ii) Ομοια, αποδεικνύεται ότι $\overline{\lim}_{x \to y}(f(x)+g(x)) \leq \overline{\lim}_{x \to y} f(x) + \overline{\lim}_{x \to y} g(x)$

Χρησιμοποιούμε την σχέση: $\underline{\lim}_{x \to y}(-f(x)) = -\overline{\lim}_{x \to y} f(x)$

Ιδιοτητες Για Ακολουθιες

Α) Εάν c πραγματική σταθερά, τότε

$$\underline{\lim}(a_n + c) = \underline{\lim}\, a_n + c$$

Αποδειξη

$\underline{\lim}(a_n + c) \geq \underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, c = \underline{\lim}\, a_n + c$

οπότε $\underline{\lim}(a_n + c) \geq \underline{\lim}\, a_n + c$ (1)

Επίσης, $\underline{\lim}(a_n + c) - c = \underline{\lim}(a_n + c) + \underline{\lim}(-c) \leq$

$\leq \underline{\lim}(a_n + c - c) = \underline{\lim}\, a_n$

Οπότε $\underline{\lim}(a_n + c) \leq \underline{\lim}\, a_n + c$ (2)

Αρα από (1), (2) $\underline{\lim}(a_n + c) = \underline{\lim}\, a_n + c$

B) Εάν $(a_n), (b_n)$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $a_n > 0$ και $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε, ισχύουν τα εξής:

i) $(\underline{\lim}(a_n))(\underline{\lim}(b_n)) \leq \underline{\lim}(a_n \cdot b_n)$

ii) $\overline{\lim}(a_n b_n) \leq (\overline{\lim}(a_n))(\overline{\lim}(b_n))$

iii) Για $\gamma \geq 0$, $\underline{\lim}(\gamma \cdot a_n) = \gamma \underline{\lim}(a_n)$

iv) Για $\gamma \geq 0$, $\overline{\lim}(\gamma \cdot a_n) = \gamma \overline{\lim}(a_n)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Έστω $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ και $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$

$$\underline{\lim}(a_n \cdot b_n) = \sup_k \inf\{a_n \cdot b_n : n \geq k\} \geq \inf\{a_n \cdot b_n : n \geq k_0\}$$

$$\overset{(*)}{\geq} \inf\{a_n : n \geq k_1\} \cdot \inf\{b_n : n \geq k_2\}$$

(*) $0 \leq \inf f \leq f$, $0 \leq \inf g \leq g$ Άρα $\inf f \inf g \leq f \cdot g$

και εφόσον $\inf\{a_n : n \geq k\}$ αύξουσα, οπότε παίρνοντας όρια $k_1, k_2 \to +\infty$ ισχύει ότι

$$(\underline{\lim}(a_n))(\underline{\lim}(b_n)) \leq \underline{\lim}(a_n \cdot b_n)$$

ii) Ομοίως με το (i).

iii) Εάν $b_n = \gamma$

▷ Αν $\gamma = 0$ ισχύει.

▷ Αν $\gamma \neq 0$. Τότε έχουμε ότι

$$\underline{\lim}(\gamma \cdot a_n) \geq \underline{\lim}\gamma \cdot \underline{\lim} a_n = \gamma \underline{\lim} a_n \quad (1)$$

$$\underline{\lim} a_n = \underline{\lim}\left(\frac{1}{\gamma}\gamma \cdot a_n\right) \geq \underline{\lim}\frac{1}{\gamma} \cdot \underline{\lim}(\gamma \cdot a_n) =$$

$= \frac{1}{\gamma} \cdot \underline{\lim} f(\gamma \cdot a_n) \overset{\times\gamma}{\Rightarrow}$

$\gamma \underline{\lim} a_n \geq \underline{\lim}(\gamma \cdot a_n) \quad (2)$

Από (1), (2) έχω ότι $\gamma \underline{\lim} a_n = \underline{\lim}(\gamma \cdot a_n)$

iv) Ομοίως, με το iii)

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $y \in A''$. Έστω, επίσης, c πραγματική σταθερά. Τότε ισχύουν τα εξής:

i) $\underline{\lim}_{x \to y} (f(x) + c) = \underline{\lim}_{x \to y} f(x) + c$

ii) $\overline{\lim}_{x \to y} (f(x) + c) = \overline{\lim}_{x \to y} f(x) + c$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) $\left(\underline{\lim}_{x \to y} f(x)\right) + c = \underline{\lim}_{x \to y} c + \underline{\lim}_{x \to y} f(x) \leq \underline{\lim}_{x \to y} (f(x) + c) \quad (1)$

Επίσης, $\underline{\lim}_{x \to y} f(x) = \underline{\lim}_{x \to y} (f(x) + c - c) \geq \underline{\lim}_{x \to y} (f(x) + c) + \underline{\lim}_{x \to y} (-c) =$

$\underline{\lim}_{x \to y} (f(x) + c) - c \quad (2)$

Από, (1), (2) $\underline{\lim}_{x \to y} (f(x) + c) = \underline{\lim}_{x \to y} f(x) + c$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $f, g: A \to \mathbb{R}$ τ.ω. $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ $\forall x \in A$. Έστω

Επίσης, $y \in A'$. Τότε

i) $\left(\varliminf_{x\to y} f(x)\right)\left(\varliminf_{x\to y} g(x)\right) \leq \varliminf_{x\to y} \left(f(x)\cdot g(x)\right)$

ii) $\varlimsup_{x\to y} \left(f(x)\cdot g(x)\right) \leq \left(\varlimsup_{x\to y} f(x)\right)\left(\varlimsup_{x\to y} g(x)\right)$

Απόδειξη

i) Από πρόταση σελ. 21, $\exists (x_n) \subseteq A\setminus\{y\}$ με $x_n \to y$ τ.ω.

$$\varliminf_{x\to y} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim_n f(x_n)\, g(x_n) = \varliminf_n f(x_n)\, g(x_n) \geq$$

$$\geq \varliminf_n f(x_n) \cdot \varliminf_n g(x_n) \geq \varliminf_{x\to y} f(x) \cdot \varliminf_{x\to y} g(x)$$

ii) Ομοίως, με το i)

Άσκηση

Να υπολογίσετε το $\varlimsup_{x\to+\infty} f(x)$ και το $\varliminf_{x\to +\infty} f(x)$ με

$f(x) = (1+e^{-x})\sin x$

Απόδ

Εφόσον, $\forall x \in A$ $h(x) \leq g(x)$ έπεται ότι $h(x) \leq g(x) \leq \sup\{g(x) : x\in A\}$, $\forall x \in A$

Άρα $\sup\{h(x) : x \in A\} \leq \sup\{g(x) : x\in A\}$

Όμοια, και $\inf\{h(x) : x\in A\} \leq \inf\{g(x) : x \in A\}$

#Υπενθύμιση

Αν $\forall x \in A$ έχουμε $h(x) \leq g(x)$ όπου $h, g : A \to \mathbb{R}$, τότε $\varliminf_{x\to y} h(x) \leq \varliminf_{x\to y} g(x)$

Οπότε, $\varliminf_{x\to y} h(x) = \sup_{\delta>0} \underbrace{\inf\{h(x) : x \in B(y,\delta)\cap A\}}_{G_\delta}$

και $F_\delta = \inf\{g(x) : x \in B_0(y,\delta) \cap A\} \leq \sup \inf\{g(x) : x \in B_0(y,\delta)\cap A\} =$

$\underline{\lim}_{x\to y} g(x)$. Άρα $\underline{\lim}_{x\to y} h(x) \leq \underline{\lim}_{x\to y} g(x)$, επειδή $\forall \delta > 0$ $G_\delta \leq F_\delta$

Λόγω των παραπάνω για $x \in (0,+\infty)$ έχουμε ότι για $f(x) = (1+e^{-x})\sin x$ ισχύουν τα εξής:

εάν $g(x) = 1 + e^{-x} \geq 0$ $\forall x \in (0,+\infty)$

Επίσης, $-1 \leq \sin x \leq 1$, οπότε $-(1+e^{-x}) \leq f(x) \leq (1+e^{-x})$

$\lim_{x\to+\infty} -(1+e^{-x}) = -1$ και $\lim_{x\to+\infty}(1+e^{-x}) = 1$, οπότε $1 \leq \underline{\lim}_{x\to+\infty} f(x) \leq 1$

Εάν $x_n = 2n\pi - \pi/2$, $\lim_n (f(x_n)) = -1$

Επίσης, αν $y_n = 2n\pi + \pi/2$, $\lim_n (f(y_n)) = 1$

Άρα $\underline{\lim}_{x\to+\infty} f(x) = -1$ και $\overline{\lim}_{x\to+\infty} f(x) = 1$

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f,g : A \to \mathbb{R}$. ΝΔΟ $\forall y \in A''$ ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες:

i) $\underline{\lim}_{x\to y}(f(x)+g(x)) \leq \underline{\lim}_{x\to y} f(x) + \overline{\lim}_{x\to y} g(x)$

ii) $(\underline{\lim}_{x\to y} f(x) + \overline{\lim}_{x\to y} g(x)) \leq \overline{\lim}_{x\to y}(f(x)+g(x))$

Για να είναι σωστές οι σημειώμενες πράξεις πρέπει να ισχύουν κάποια από τα παρακάτω

i) 1) $\underline{\lim}_{x\to y} f(x) = +\infty$ και $\overline{\lim}_{x\to y} g(x) \in \mathbb{R}$ ή $\overline{\lim}_{x\to y} g(x) = +\infty$

2) $\underline{\lim}_{x\to y} f(x) = -\infty$ και $\overline{\lim}_{x\to y} g(x) \in \mathbb{R}$ ή $\overline{\lim}_{x\to y} g(x) = -\infty \Rightarrow$

$\underline{\lim}_{x\to y} g(x) = -\infty$

3) $\underline{\lim}_{x\to y} f(x) \in \mathbb{R}$ και $\overline{\lim}_{x\to y} g(x) =$ οτιδήποτε

Έχουμε $\underline{\lim}_{x\to y} f(x) = \underline{\lim}_{x\to y} (f(x)+g(x)-g(x)) \geq$

$\geq \underline{\lim}_{x\to y} (f(x)+g(x)) + \underline{\lim}_{x\to y} (-g(x)) =$

$= \underline{\lim}_{x\to y} (f(x)+g(x)) - \overline{\lim}_{x\to y} g(x)$

Άρα $\underline{\lim}_{x\to y} (f(x)+g(x)) \leq \underline{\lim}_{x\to y} f(x) + \overline{\lim}_{x\to y} g(x)$

ii) Η.Ω.

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω $f: A\to\mathbb{R}$ και $f(x)>0$ $\forall x\in A$. ΝΔΟ $\forall y\in A''$ ισχύει
ότι $\underline{\lim}_{x\to y} f^n(x) \geq (\underline{\lim}_{x\to y} f(x))^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$

(Με επαγωγή):

- για $n=1$ έχω: $\underline{\lim}_{x\to y} f(x) = (\underline{\lim}_{x\to y} f(x))^1$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n=k$, δηλ.

- $\underline{\lim}_{x\to y} f^k(x) \geq (\underline{\lim}_{x\to y} f(x))^k$, τότε

$\underline{\lim}_{x\to y} f^{k+1}(x) = \underline{\lim}_{x\to y} f^k(x)\cdot f(x) \geq \underline{\lim}_{x\to y} f^k(x) \cdot \underline{\lim}_{x\to y} f(x) \geq$ $f(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{N}$

$(\underline{\lim}_{x\to y} f(x))^k \cdot \underline{\lim}_{x\to y} f(x) = (\underline{\lim}_{x\to y} f(x))^{k+1}$

Επομένως, ισχύει ΚΠΕΝ